12/05/20

• Λύσεις Παραδείγματα με χρήση της R

• Θεωρία

Δυϊκή Θεωρία

Θεωρούμε το ακόλουθο ΠΓΠ σε κανονική μορφή

$z = \max(\underline{c}^T \underline{x})$

$A\underline{x} = \underline{b}$

$\underline{x} \geq \underline{0}$

Το οποίο καλούμε πρωτεύων κι έστω ότι έχει βέλτιστη λύση που είναι η $\underline{x}'$

Ακολουθώντας τη λογική των πολλαπλασιαστών Lagrange εισάγουμε ένα πρόβλημα όπου οι περιορισμοί $A\underline{x} = \underline{b}$ αντικαθίστανται από τη συνάρτηση ποινής $\underline{u}^T(\underline{b} - A\underline{x})$, όπου $\underline{u}$ είναι το διάνυσμα των μεταβλητών ποινής και ανήκει στον $\mathbb{R}^m$, όπως το $\underline{b}$.
Έχουμε τότε το πρόβλημα $z = \max[\underline{c}^T\underline{x} + \underline{u}^T(\underline{b} - A\underline{x})]$, $\underline{x} \geq 0$
Έστω $g(\underline{u})$ η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του νέου προβλήματος σαν συνάρτηση του διανύσματος ποινών $\underline{u}$.
Το νέο πρόβλημα, καθώς δεν απαιτεί την αυστηρή ικανοποίηση των περιορισμών του αρχικού προβλήματος θα πρέπει να επιτυγχάνει καλύτερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, οπότε θα έχουμε $g(\underline{u}) = \max_{\underline{x} \geq 0}[\underline{c}^T\underline{x} + \underline{u}^T(\underline{b} - A\underline{x})] \geq \underline{c}^T\underline{x}' + \underline{u}^T(\underline{b} - A\underline{x}') = \underline{c}^T\underline{x}'$ (1)

Το νέο πρόβλημα για κάθε τιμή $\underline{u}$ μας δίνει ένα άνω όριο $g(\underline{u})$ του βέλτιστου κέρδους $\underline{c}^T\underline{x}'$

Το προβλημα αυτο καλειται δυικό και ενα απο τα θεμελιώδη αποτελεσματα της δυικής θεωρίας ειναι ότι, η βελτιστη τιμη της αντικ. συναρτησης του δυικου προβληματος ειναι ιση με την βελτιστη τιμη της αντικειμενικής συναρτησης του πρωτευοντος.
Αυτο πρακτικα μας λεει οτι τελικα δεν συμφερει η παραβιαση των περιορισμων $Ax = b$

Η γενικη μορφη του δυικου προβληματος.

Εστω A ενας πινακας με γραμμες α_i^T και στηλες A_j
Αν δοθει το παραπανω πρωτευων ΠΓΠ

$$
\begin{aligned}
z &= \max (c^T x) \\
\alpha_i^T x &\geq b_i, \quad i \in M_1 \\
\alpha_i^T x &\leq b_i, \quad i \in M_2 \\
\alpha_i^T x &= b_i, \quad i \in M_3 \\
x_j &\geq 0, \quad j \in N_1 \\
x_j &\leq 0, \quad j \in N_2 \\
x_j &\in R^n, \quad j \in N_3
\end{aligned}
$$

Το δυικο προβλημα ειναι το ακολουθο.

$$
\begin{aligned}
z &= \min (u^T b) \\
u_i &\leq 0, \quad i \in M_1 \\
u_i &\geq 0, \quad i \in M_2 \\
u_i &\in R^n, \quad i \in M_3 \\
u^T A_j &\geq c_j, \quad j \in N_1 \\
u^T A_j &\leq c_j, \quad j \in N_2 \\
u^T A_j &= c_j, \quad j \in N_3
\end{aligned}
$$

Πρεπει να παρατηρησουμε οτι για καθε περιορισμο στο πρωτευων προβλημα εισαγουμε μια μεταβλητη στο δυικο κι ακομη για καθε μεταβλητη του πρωτευοντος εισαγουμε εναν περιορισμο στο δυικο. Υπαρχει δηλαδη μια αντιστοιχια μεταξυ των μεταβλητων του πρωτευοντος και των περιορισμων του δυικου και το αντιστροφο.

Ανάλογα με το αν ένας περιορισμός του πρωτεύοντος είναι ισοτικός ή ανισοτικός η αντίστοιχη μεταβλητή του δυϊκού παίρνει τιμές σ'όλο το $\mathbb{R}$ ή έχει περιορισμούς που καθορίζουν το πρόσημό της.

Ακόμα ανάλογα με το αν μια μεταβλητή στο πρωτεύον περιορίζεται από περιορισμούς μη αρνητικότητας ή μη θετικότητας, ή τίποτα από τα δύο έχουμε αντίστοιχα περιορισμούς ανισοτικούς (με φορά $\geq$ ή $\leq$ αντίστοιχα) ή ισοτικούς αντίστοιχα στο δυϊκό πρόβλημα.

Γενικότερα συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Πρωτεύον			Δυϊκό
αντικ. συνάρτ.	max	min	αντικ. συνάρτ.
Περιορισμοί	$\leq b_i$	≥ 0	Μεταβλητές
	$\geq b_i$	≤ 0	
	$= b_i$	$\in \mathbb{R}$	
Μεταβλητές	≥ 0	$\geq c_i$	Περιορισμοί
	≤ 0	$\leq c_i$	
	$\in \mathbb{R}$	$= c_i$	

Παράδειγμα

Πρωτεύον

$\max(c^T x)$

$A x = b$

$x \geq 0$

Δυϊκό

$\min(u^T b)$

$u^T A \geq c^T$

Πρωτεύον

$\max(c^T x)$

$A x \leq b$

Δυϊκό

$\min(u^T b)$

$u^T A = c^T$

$u^T \geq 0^T$

Παράδειγμα

Έστω το ακόλουθο ΠΓΠ

$$Z = \max(-x_1 - 2x_2 - 3x_3)$$
$$-x_1 + 3x_2 = 5$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6$$
$$x_3 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \in \mathbb{R}$$

α) Βρείτε το δυϊκό του

β) Στη συνέχεια βρείτε το δυϊκό του δυϊκού.

Λύση

Το δυϊκό είναι το ακόλουθο πρόβλημα

$$Z = \min(5u_1 + 6u_2 + 4u_3)$$
$$-u_1 + 2u_2 \geq -1$$
$$3u_1 - u_2 \leq -2$$
$$3u_2 + u_3 = -3$$
$$u_1 \in \mathbb{R},\ u_2 \leq 0,\ u_3 \geq 0$$

Μετασχηματίζουμε το δυϊκό σ' ένα ισοδύναμο πρόβλ. μεγιστοποίησης και μετονομάζουμε τις μεταβλητές u_1, u_2, u_3 σε x_1, x_2, x_3 αντίστοιχα οπότε έχουμε

$$Z = -\max(-5x_1 - 6x_2 - 4x_3)$$
$$-x_1 + 2x_3 \geq -1$$
$$3x_1 - x_2 \leq -2$$
$$3x_2 + x_3 = -3$$
$$x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0$$

$$Z = -\min(-u_1 - 2u_2 - 3u_3)$$
$$-u_1 + 3u_2 = -5$$
$$2u_1 - u_2 + 3u_3 \leq -6$$
$$u_3 \geq -4$$
$$u_1 \leq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \in \mathbb{R}$$

Αν στο τελευταίο πρόβλημα θέσουμε $x_1 = -u_1$, $x_2 = -u_2$, $x_3 = -u_3$ το μετατρέπουμε από πρόβλ. ελαχιστοποίησης σε μεγιστοποίησης και πολλ/με τους περιορισμούς με (-1) θα έχουμε το πρόβλημα που μας δόθηκε στην αρχή.

Άρα

Θεώρημα: Αν μετατρέψουμε το δυϊκό ενός πρωτεύοντος σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα μεγιστοποίησης και στη συνέχεια βρούμε το δυϊκό του, αυτό θα είναι ισοδύναμο με το πρωτεύον.

Θεώρημα: Αν x είναι μια εφικτή λύση του πρωτεύοντος ΠΓΠ και u μια εφικτή λύση του δυϊκού, τότε $\underline{u}^T b \geq \underline{c}^T x$

Το παραπάνω θεώρημα μας προσφέρει χρήσιμες πληροφορίες για τη σχέση ανάμεσα στο πρωτεύον και το δυϊκό.

Πόρισμα
α) Αν το βέλτιστο κέρδος του πρωτεύοντος είναι $+\infty$, τότε το δυϊκό δεν έχει λύση
β) Αν η βέλτιστη τιμή της αντικ. συνάρτησης του δυϊκού είναι $-\infty$, τότε το πρωτεύον δεν έχει λύση.

Πόρισμα: Έστω $\underline{x}$ και $\underline{u}$ εφικτές λύσεις του πρωτεύοντος και του δυϊκού αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι $\underline{u}^T b = \underline{c}^T \underline{x}$. Τότε τα $\underline{x}$ και $\underline{u}$ είναι βέλτιστες λύσεις του πρωτεύοντος και του δυϊκού αντίστοιχα.

Απόδειξη: Έστω $\underline{x}$ και $\underline{u}$ εφικτές λύσεις του πρωτεύοντος και του δυϊκού αντίστοιχα για τις οποίες ισχύει ότι $\underline{u}^T \underline{b} = c^T \underline{x}$. Από το παραπάνω θεώρημα έχουμε ότι για κάθε εφικτή λύση του πρωτεύοντος $\underline{z}$ ισχύει η σχέση $\underline{c}^T \underline{x} = \underline{u}^T \underline{b} \geq \underline{c}^T \underline{z}$ που αποδεικνύει ότι η $\underline{x}$ είναι βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος.
Όμοια αποδεικνύεται ότι η $\underline{u}$ είναι βέλτιστη λύση του δυϊκού.

Το Θεώρημα:

Αν ένα ΠΓΠ έχει βέλτιστη λύση, τότε το δυϊκό του έχει βέλτιστη λύση και αντίστοιχες τιμές των αντικ. συναρτήσεων τους είναι ίσες.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει όλα τα πιθανά ενδεχόμενα για το πρωτεύον και το δυϊκό του.

Δυϊκό	Πρωτεύον		
	Ύπαρξη βέλτιστου	Μη φραγμένο κέρδος	Μη ύπαρξη λύσης
Ύπαρξη βέλτιστου	Δυνατό	Αδύνατο	Αδύνατο
Μη φραγμένο κέρδος	Αδύνατο	Αδύνατο	Δυνατό
Μη ύπαρξη λύσης	Αδύνατο	Δυνατό	Δυνατό

Θεώρημα

Έστω x μια εφικτή λύση του πρωτεύοντος ΠΓΠ και u μια εφικτή λύση του δυϊκού του, τότε τα διανύσματα x και u είναι βέλτιστες λύσεις του πρωτεύοντος και του δυϊκού αντίστοιχα αν-ν

$$u_i(b_i - a_i^T x) = 0, \ \forall i$$

$$(u^T A_j - c_j)x_j = 0, \ \forall j$$

Παράδειγμα

Έστω το ακόλουθο ΠΓΠ

$$z = \max(2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4)$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

$$2x_3 - 3x_4 = 3$$

$$x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, 4$$

*Υπάρχει λάθος στις σημειώσεις του eclass. Αλλιώς δεν βγαίνει το δυϊκό

α) Βρείτε το δυϊκό του

β) Αν είναι γνωστή βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος $x^{*T} = [\frac{1}{5}, 0, \frac{21}{5}, \frac{9}{5}]$

να βρειτε τη βελτιστη λυση του δυικου.

Λυση

α) Το δυικο ειναι το ακολουθο προβλημα.

$$Z = \min(3u_1 + 6u_2 + 3u_3)$$

$$u_1 \geq 2$$

$$2u_1 + u_2 \geq -3$$

$$u_1 + u_2 + 2u_3 \geq 1$$

$$2u_1 + u_2 - 3u_3 > 2$$

$$u_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2,3$$

β) Αφου το πρωτευον ειναι σε κανονικη μορφη οι συνθηκες $u_i(b_i - a_i^T \underline{x}) = 0$ ικανοποιουνται για ολα τα i.

Οι συνθηκες $(u^T A_j - c_j)x_j = 0$ ικανοποιουνται για $j=2$ αφου $x_2' = 0$ (απο τη λυση του πρωτευοντος)

Μενει και $x_1', x_3', x_4' > 0$ θα πρεπει να ικανοποιειται το παρακατω συστ. εξισωσεων.

$$u_1 = 2$$

$$u_1 + u_2 + 2u_3 = 1$$

$$2u + u_2 - 3u_3 = 2$$

Που εχει λυση $u_1 = 2, \ u_2 = \frac{-7}{5}, \ u_3 = \frac{1}{5}$

Συνεπως η βελτιστη λυση του δυικου προβληματος ειναι $\underline{u}^T = [2, \frac{-7}{5}, \frac{1}{5}]$

Η βελτιστη ~~[illegible]~~τιμη των αντικειμ. συναρτ. και των δυο προβληματων ειναι

$Z = 3,2$